

# AWALEE NOTES



Marchés de l'électricité et valorisation d'une production hydraulique

Etude réalisée par la Practice Quantitative

# Tables des matières

1. Introduction	3
2. Les dérivés réels et l'exemple d'un barrage hydraulique	3
3. Résolution numérique d'un problème de contrôle optimal stochastique	4
3.1 Méthode des différences finies	4
3.2 Principe de Programmation Dynamique en temps discret	5
3.3 Une méthode particulière	6
4. Conclusion	7



## Abstract

Dans cette note, nous présentons tout d'abord brièvement les marchés financiers de l'énergie. Nous nous focalisons ensuite sur la problématique de valorisation de l'électricité produite par une infrastructure hydraulique. Sa résolution, qui représente l'objet principal de notre étude, est un préalable fondamental en vue de finalités diverses. Tout d'abord, afin de pricer et hedger des produits dérivés sur l'électricité. Ensuite, pour définir la stratégie relative aux investissements dans les infrastructures, ainsi que dans la gestion du parc et des réservoirs hydrauliques. Cet aspect stockage de l'électricité via des barrages hydrauliques, ainsi que leur gestion, est crucial notamment afin de satisfaire la demande lors de pics exceptionnels de consommation. Enfin, d'un point de vue comptable, pour que le producteur (par exemple EDF), puisse valoriser ses actifs (infrastructures, parcs...).

Ainsi, l'intérêt économique du producteur est de maximiser les profits générés par la vente de l'électricité et de valoriser au mieux ses infrastructures. La problématique sera donc la suivante: étant donné un ensemble de contraintes bien définies, comment maximiser les profits ? Mathématiquement, nous la modéliserons via un problème de contrôle optimal stochastique dont la résolution numérique sera l'objet de la section 3. Différentes méthodes numériques seront alors présentées et en particulier la méthode particulière, qui s'avère être une alternative intéressante et judicieuse aux techniques usuelles.



# awalee notes

## 1. INTRODUCTION

Les marchés financiers des matières premières, communément appelés «marchés des commodities», permettent l'achat et la vente de produits financiers exotiques ayant comme sous-jacent une (des) matière(s) première(s). Le café, les métaux précieux, le pétrole, l'électricité sont autant de matières traitées sur ces marchés.

Malgré beaucoup de similarités avec d'autres classes d'actifs, les commodities présentent des spécificités dues à la nature même des matières premières : livraison physique du sous-jacent, transport maritime/terrestre, stockage, caractère périssable, etc ...

C'est pourquoi, les produits financiers portant sur ces sous-jacents posent un certain nombre de difficultés techniques et théoriques. Par exemple, l'électricité ne se stocke pas. Cela implique notamment une gestion rigoureuse, minutieuse et en temps réel de la production. Quant à son transport, il est bien connu que l'électricité circule dans un réseau selon les lois de Birkhoff. Cela implique notamment que la capacité de transport des lignes doit être connue et peut différer d'un pays à l'autre. Toutes ces contraintes nécessitent des outils et une modélisation différentes de ce qui est traditionnellement fait pour d'autres actifs (taux, equity, credit, FX, etc...).

Etant donné l'étendue des sujets, nous allons à présent nous concentrer sur le cas de l'énergie hydraulique qui, du point de vue pricing, requiert des méthodes sophistiquées.

## 2. Les dérivés réels et l'exemple d'un barrage hydraulique

En France, la distribution de l'électricité nécessite une attention en temps réel afin de pouvoir ajuster si besoin. En effet, lors de pics de demande imprévus (événement climatique imprévu, problème technique au sein d'un site de production etc...), le distributeur doit satisfaire l'offre en tenant compte de la demande. C'est pourquoi, un mécanisme dit «d'effacement» a été mis en place pour les sites industriels gros consommateurs. Lors de ces événements perturbant l'équilibre offre/demande, le producteur sollicite ces industriels afin de leur proposer une période d'effacement.

Cela consiste à ce que le consommateur industriel accepte de ne pas consommer de courant pendant une période déterminée, en échange de quoi le producteur s'engage à l'indemniser via une baisse de tarifs pour la consommation du lendemain. Cela permet ainsi d'ajuster en temps réel une perturbation de l'équilibre. En ce sens, et par analogie avec les options «réelles» répandues en gestion, les produits dérivés sur l'électricité sont souvent appelés dérivés réels. Dans toute la suite, nous allons nous intéresser au cas de l'électricité produite par un barrage hydraulique. Une telle infrastructure peut être pensée comme un actif à part entière en ce sens, qu'en l'alimentant avec de l'eau, elle produit de l'électricité qui peut ensuite être vendue et donc, crée de la valeur.

Mais alors, comment valoriser cette valeur ajoutée ainsi produite ? L'eau, «combustible» d'un barrage, est une ressource limitée. Son utilisation et stockage sont donc soumis à réglementation. Dans le même temps, le producteur souhaite optimiser le revenu tiré de sa production afin de couvrir ses coûts de production et générer un bénéfice pour entretenir, investir etc... En d'autres termes, étant donné un ensemble de contraintes (rg lémentaires, naturelles (pluviométrie, relief)), le producteur souhaite maximiser ses revenus. Mathématiquement, une première modélisation serait de considérer ce problème de valorisation comme un problème de contrôle optimal stochastique de la façon suivante,

$$(P) := \begin{cases} \sup_{q_t \in [0, \bar{q}]} \left\{ \int_0^T q_t S_t dt + g(S_T, X_T) \right\}, & (2.1) \\ dX_s^{0,x} = (a_s^{0,x} - q_s - \delta_s) ds, X_0^{0,x} = x, t \in [0, T]. \end{cases}$$

où  $S$  est le prix spot de l'électricité,  $X$  le niveau du lac en amont du barrage,  $a$  le flux (stochastique) d'apport en eau (intempéries, fonte des glaciers ...).  $\delta$  représente la variable de spilling, c'est-à-dire la quantité d'eau évacuée du lac en amont si la production a déjà atteint son maximum (i.e  $q = \bar{q}$ ).

Enfin,  $g$  représente le niveau minimal d'eau du lac que doit respecter l'exploitant après production. La première ligne de (2.1), représente le critère que l'on souhaite maximiser, c'est-à-dire les gains optimaux dont le producteur peut tirer de la vente de l'électricité, étant les contraintes (caractérisées par la fonction  $g$ ).

Ces problèmes de contrôle, bien connus, présentent néanmoins des difficultés pour leur résolution numérique et en particulier en grande dimension ( $\geq 4, 5$ ).

En effet, la précision et le temps de calcul sont des contraintes opérationnelles évidentes qui pourtant sont actuellement loin d'être dépassées.

Dans toute la suite de cette note, nous allons voir les différentes méthodes numériques existantes pour résoudre numériquement ces problèmes de contrôle.

### 3. Résolution numérique d'un problème de contrôle optimal stochastique

On se propose à présent de présenter ici les différentes méthodes numériques de résolution d'un problème de contrôle optimal stochastique. Pour cela, nous considérons la formulation suivante

$$V(t, x) = \sup_{\nu \in U} E \left\{ \int_t^T f(X_s^{t,x,\nu}, \nu_s) ds + g(X_T^{t,x,\nu}) \right\} \tag{3.2}$$

$$dX_s^{t,x,\nu} = b(X_s^{t,x,\nu}, \nu_s) ds + \sigma(X_s^{t,x,\nu}, \nu_s) dW_s, X_t^{t,x,\nu} = x, t \in [0, T] \tag{3.3}$$

On ne précisera pas ici les hypothèses techniques assurant l'existence et l'unicité du processus X. Mentionnons simplement que pour l'existence/unicité au sens fort, une régularité de type Lipschitz pour b, σ est requise ainsi qu'une croissance au plus polynomiale pour f. Le contrôle ν sera pris dans un sous-ensemble des processus mesurables, bornés. On suppose à partir de maintenant que le contrôle ν est markovien, i.e. ν\_t := ν(t, X\_t) avec X le processus de diffusion défini auparavant. Alors, dans ce cas, le Principe de Programmation Dynamique (DDP) établit que la fonction valeur V définie par (3.2) satisfait l'EDP suivante, dite EDP d'Hamilton-Jacobi-Bellman.

$$\partial_t V + \sup_{\nu \in U} \{ L^\nu V + f(x, \nu) \} = 0, t \in [0, T], x \in R^d \tag{3.4}$$

$$V(T, x) = g(x) \tag{3.5}$$

avec

$$L^\nu \varphi := \frac{1}{2} Tr((\sigma \sigma')(x, u) D_{xx}^2 \varphi)(x) + b(x, u)' D \varphi(x),$$

pour φ deux fois différentiables et ' denotant la transposition dans l'espace des matrices. Nous pouvons à présent aborder les différentes méthodes numériques.

#### 3.1. Méthode des différences finies

La méthode des différences finies, très classique en analyse numérique, consiste à approximer les opérateurs différentiels par l'accroissement infinitésimal associé.

Par exemple, dans le cas d'une dérivée première pour une fonction f : R → R, on fait l'approximation suivante

$$Df(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \text{ pour } h \text{ petit.}$$

De la même façon, la dérivée seconde pourra être approchée par

$$D^2 f(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{2h}, \text{ pour } h \text{ petit.}$$

On se fixe t\_0 = 0 < t\_1 < ... < t\_n := T une subdivision de [0, T] de pas constant δ\_t et x\_0 < x\_1 < ... < x\_J une subdivision spatiale, de pas δ\_x. En introduisant la matrice (v\_ij)\_{0 ≤ i ≤ J, 0 ≤ j ≤ n} et en appliquant la méthode des différences finies, on obtient le système discrétisé suivant,

$$\begin{cases} v_{ij} = g(x_i), \text{ for } i = 1, \dots, J \text{ condition terminale,} \\ v_{1j} = 0 = v_{Jn}, \text{ condition au bord,} \\ v_j = T_{v_{j+1}}(v_j), \text{ avec } v_j = (v_{ij})_{2 \leq i \leq J-1}, \end{cases} \tag{3.6}$$

où la fonction T est définie pour (u, v) ∈ R\_{J-2} × R\_{n-2} par

$$\begin{cases} T_w(v) = \max_u T_w^u(v) \\ T_w^u(v) = \theta \delta t A^u(v) + (I + (1 - \theta) \delta t A^u) w + \delta t f_j^u, \end{cases} \tag{3.7}$$

où le maximum est pris sur l'ensemble des fonctions u : x\_i ∈ {x\_2, ..., x\_{J-1}} → u(x\_i) ∈ U et la matrice A est définie par

$$A^u = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \gamma_3 & \alpha_3 & \beta_3 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_{J-2} & \alpha_{J-2} & \beta_{J-2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \alpha_{J-2} & \beta_{J-2} \end{pmatrix}$$

avec

$$\alpha_i = \frac{-\sigma \sigma'(x_i)}{\delta x}, \beta_i = \frac{\sigma \sigma'(x_i)}{2(\delta x)^2} + \frac{b(x_i)}{2\delta x} \text{ et } \gamma_i = \frac{\sigma \sigma'(x_i)}{2(\delta x)^2} - \frac{b(x_i)}{2\delta x}$$

On reconnait ici la forme d'un θ-schéma dans la troisième équation de (3.7). Ces derniers ont notamment la particularité intéressante d'être inconditionnellement stable, contrairement aux schémas explicites.

Finalement, la résolution se fait en deux temps. En partant des conditions initiales v^0 (fonction valeur) et u^0 (contrôle), on obtient pour tout k = 0, ..., k\_max,

$$v^{k+1} = T_w(v^k) \tag{3.8}$$

et

$$\begin{cases} v^k = T_w^{u^k}(v^k), \\ u^{k+1} = \operatorname{argmin}_{u \in U} T_w^u(v^k). \end{cases} \tag{3.9}$$

A la vue du système discrétisé précédent, il est évident que sa résolution peut rapidement s'avérer coûteuse en ressource (mémoire) et en temps. Il a en effet été établi que la discrétisation par différences finies est performante et efficace pour des équations de dimension inférieure ou égale à 3 maximum.

C'est ce qui justifie l'existence, par exemple, de la méthode ADI pour simplifier la résolution numérique en dimension 2, 3 en évitant l'apparition de termes croisés. Enfin, la seconde étape de la résolution du système nécessite de trouver la solution d'un problème d'optimisation déterministe, qui peut s'avérer elle-même complexe et délicate (algorithmes à direction de descente, Lagrangien, dualité, pénalisation...)

C'est pourquoi nous présentons dans la suite une autre méthode alternative, reposant sur la formulation probabiliste du problème de contrôle, voir équations (3.2).

### 3.2. Principe de Programmation Dynamique en temps discret

Soit  $t_0 := 0 < t_1 < \dots < t_n := T$  une discrétisation de pas constant  $\delta_t$  de l'intervalle  $[0, T]$ .

Rappelant la première équation de (3.2), l'idée est de discrétiser directement le processus contrôlé  $X$  et d'en déduire ainsi une version discrétisée de la fonction valeur  $V$ .

Soit  $(p, k)$  deux entiers positifs tels que  $p \geq k$ . On note  $U^{p-k}$  l'ensemble des fonctions mesurables, bornées définies sur  $R^d$ . Enfin, on utilisera la notation suivante

$$u_{k;p-1} := (u_k, \dots, u_{p-1}).$$

Alors, à l'aide d'un schéma d'Euler, nous discrétisons comme suit l'EDS,

$$\begin{cases} \bar{X}_{t_p}^{k,X,u_{k;p-1}} = \bar{X}_{t_p}^{k,X,u_{k;p-1}} + b_p \delta t + \sigma_p \sqrt{\delta t} \varepsilon_{p+1}, & \text{for all } p \geq k, \\ \bar{X}_{t_k}^{k,X,u_{k;n-1}} = x, \end{cases} \quad (3.10)$$

avec

$$b_p := b(\bar{X}_{t_{p-1}}^{k,X,u_{k;p-1}}, u_p(\bar{X}_{t_{p-1}}^{k,X,u_{k;p-1}})),$$

et

$$\sigma_p := \sigma(\bar{X}_{t_{p-1}}^{k,X,u_{k;p-1}}, u_p(\bar{X}_{t_{p-1}}^{k,X,u_{k;p-1}})).$$

Reste maintenant à discrétiser la seconde équation de (3.2). En notant

$$J_k(x, u_{k;p-k}) := \left\{ \delta t \sum_{i=k}^{p-1} f(t_i, \bar{X}_{t_i}^{k,X,u_{k;p-1}}) + g(\bar{X}_T^{k,X,u_{k;p-1}}) \right\},$$

alors l'équation définissant la fonction valeur  $V$  devient, après discrétisation,

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, V_k(x) := \sup_{u_{k;n-1} \in U^{n-k}} J_k(x, u_{k;n-1}), \text{ for all } x \in \mathbb{R}^d.$$

Le principe de programmation dynamique sous forme discrétisée donne alors la récurrence «backward» suivante

$$\begin{cases} V_n(\cdot) = g(\cdot), \\ V_k(\cdot) = f(\cdot) + \sup_{u_k \in U} E \left\{ V_{k+1}(\bar{X}_{k+1}^{k,\cdot,u_k}) \right\} \\ \text{for all } k \in \{0, \dots, n-1\}. \end{cases} \quad (3.11)$$

La solution du problème de contrôle initial s'obtient donc en résolvant de manière backward le système (3.11). Pour cela, reste deux obstacles à dépasser: le calcul de l'espérance conditionnelle et l'optimisation sur l'ensemble des contrôles.

Le calcul numérique d'espérance conditionnelle est loin d'être trivial. Plusieurs méthodes ont été développées à cette fin. La plus célèbre est probablement celle proposée par Longstaff et Schwartz, qui consiste à interpréter l'espérance conditionnelle comme une projection orthogonale dans l'espace des fonctions de carré intégrable. Ce dernier étant de Hilbert, il possède au moins une base orthonormale et l'idée est donc d'approximer l'espérance conditionnelle comme les  $N$  premiers termes de sa décomposition sur cette base. Il existe également des méthodes reposant sur un maillage de l'espace d'état (méthode de quantification, méthode de maillage, etc ...). L'inconvénient majeur de ces méthodes tient à la sensibilité par rapport à la dimension de l'espace. Plus la dimension est grande, plus les calculs sont longs et imprécis.

Quant à la maximisation de l'espérance sur l'ensemble des contrôles, une première approche consiste, à chaque pas de temps  $k$ , à postuler une forme paramétrique du contrôle  $x \rightarrow u_k^\theta(x)$  avec  $\theta$  un paramètre et effectuer l'optimisation par rapport à ce paramètre. En vue d'un résultat précis, cela suppose d'avoir une intuition quant à la forme de la paramétrisation, ce qui n'est pas toujours claire. Dans le cas où la maximum existe et est unique, il existe des méthodes reposant sur le Calcul de Malliavin, notamment pour le calcul d'espérance relative au processus tangent de la diffusion.

Dans ce cas aussi, quiconque a déjà été confronté au calcul numérique d'espérance conditionnelle sait que cela peut s'avérer très coûteux. L'apparition de cet objet dans l'algorithme précédent tient à la nature backward du problème. Dans la dernière section de cette note, nous allons présenter une méthode innovante qui tente de dépasser ce problème. Néanmoins, faisant actuellement l'objet de recherches actives et afin de ne pas alourdir le discours au travers d'éléments trop techniques, cette section présentera la méthode de manière informelle.

### 3.3. Une méthode particulière

L'objectif de ce type de méthode est donc d'éviter le calcul numérique d'objets de type espérance conditionnelle. Comme vu précédemment, l'apparition de ces espérances tient principalement à la nature backward des problèmes étudiés. La première étape est donc de formuler de façon forward le problème backward.

Pour illustrer ce propos, rappelons l'expression de l'EDP de Hamilton-Jacobi-Bellman (3.4)

$$\partial_t V + \sup_{\nu \in U} \{L^\nu V + f(x, \nu)\} = 0, t \in [0, T], x \in R^d \quad (3.12)$$

$$V(T, x) = g(x) \quad (3.13)$$

On suppose que le sup est atteint en un unique point  $u^*$  et pour ne pas surcharger les notations, nous l'omettrons dans la suite. L'EDP devient ainsi

$$\partial_t V + F(t, x, V, DV, D^2V) = 0, t \in [0, T], x \in R^d \quad (3.14)$$

$$V(T, x) = g(x), \quad (3.15)$$

où

$$F(t, x, z, w) := \sup_{u \in U} \left\{ \frac{1}{2} Tr((\sigma\sigma')(x, u)w(t, x)) + b(x, u)'z(t, x) \right\}$$

En faisant un changement de temps  $t \rightarrow T - t$ , on obtient alors une EDP forward, i.e.

$$\partial_t \bar{V} = \bar{F}(t, x, \bar{V}, D\bar{V}, D^2\bar{V}), t \in ]0, T], x \in R^d \quad (3.16)$$

$$\bar{V}(0, x) = g(x), \quad (3.17)$$

où

$$\bar{V}(t, x) = V(T - t, x) \text{ et } \bar{F}(t, \cdot, \cdot, \cdot) := F(T - t, \cdot, \cdot, \cdot)$$

L'EDP ainsi obtenue est forward au sens où, partant d'une condition initiale  $\bar{V}(0, \cdot)$ , elle décrit ensuite la dynamique de  $V$  pour  $t > 0$  contrairement au cas backward.

La seconde étape de la méthode consiste à trouver une représentation probabiliste de cette EDP. En effet, les méthodes particulières sont des méthodes probabilistes. Or, l'EDP étant déterministe, une question importante se pose : comment représenter, de manière probabiliste, une telle EDP ?

Dans le cas très simple d'une diffusion d'Itô, il est connu que la loi d'une de ses solutions satisfait l'EDP de Fokker-Planck. En ce sens, on peut dire que la diffusion d'Itô représente la solution de l'EDP de Fokker-Planck. L'idée est donc de généraliser ce type d'approche. Pour cela, les travaux menés dans cette direction ont étendu la notion d'EDS de type McKean-Vlasov.

Une telle généralisation (formelle) au cas nous concernant ici conduit à introduire l'équation différentielle généralisée suivante:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma(Y_s, u(s, Y_s)) dW_s + \int_0^t b(Y_s, u(s, Y_s)) ds, t \in [0, T], \quad (3.18)$$

avec  $u : [0, T] \times R^d \rightarrow R$  définie par la relation suivante, pour toute fonction test  $\varphi$ ,

$$\int_d \varphi(x) u(t, x) dx = \left\{ \varphi(Y_t) \exp \int_0^t \bar{F}(s, Y_s, u(s, Y_s), \nabla u(s, Y_s), \nabla^2 u(s, Y_s)) ds \right\}. \quad (3.19)$$

Contrairement à une EDS classique, on voit que les coefficients de la diffusion  $\sigma$ ,  $b$  dépendent de la loi de la solution elle-même via la fonction  $u$ .

Par exemple, si  $F = 0$  alors  $u$  n'est rien d'autre que la loi de  $Y$ . La seule chose qu'il convient de noter est de voir qu'une simple application de la formule d'Itô appliquée à  $\varphi(Y_t)$  montre facilement que la loi du processus  $Y$  satisfait l'EDP (3.16). Nous ne détaillerons pas davantage la résolution de ces EDS ni l'existence/unicité de la correspondance entre l'EDS (3.18)-(3.19) et l'EDP (3.16).

L'idée essentielle à retenir est la suivante: partant de cette représentation probabiliste, on peut alors simuler le processus  $Y$ , en déduire les valeurs de la fonction  $u$ , qui n'est autre que la solution de l'EDP (3.16), i.e. la fonction  $V$  donc le critère que l'on souhaitait maximiser (voir (3.2)). Quant au schéma numérique, il repose sur des simulations de type Monte-Carlo, d'où le nom de méthode particulière. Contrairement au cas traité précédemment, on peut noter qu'avec cette méthode, nous n'avons pas eu besoin d'espérance conditionnelle, ce qui était un des objectifs affichés en plus de la résolution du problème de contrôle.



#### 4. Conclusion

Nous avons pu observer la nécessité de disposer d'outils élaborés pour affronter un problème de valorisation. Une modélisation fidèle et pertinente requiert en effet des concepts non triviaux.

D'un point de vue numérique en particulier, les méthodes employées, et présentées ici sont diverses: certaines sont abondamment étudiées et développées dans la littérature académique et appliquée (différences finies, estimation d'espérance conditionnelle ...). Néanmoins, en dépit de leurs qualités, celles-ci se révèlent être insuffisantes pour résoudre un problème de contrôle en grande dimension: temps de calcul trop longs pour une dimension supérieure à 3 ou 4, complexité algorithmique exponentielle, majoration de l'erreur commise trop lente...

C'est pourquoi nous avons proposé les méthodes particulières qui ont l'avantage de ne pas avoir à estimer des espérances conditionnelles. Elles permettent aussi d'avoir une majoration du taux de convergence relativement insensible à la dimension. Enfin, le temps de calcul est largement réduit, d'autant plus via des technologies telles le calcul distribué ou GPU. Les méthodes particulières font d'ailleurs l'objet d'une recherche académique active et très riche. Un vaste champ encore à explorer...



#### A PROPOS D'AWALEE

Awalee est un cabinet de conseil indépendant spécialiste du secteur de la Finance, créé en 2009 et qui compte plus de 70 collaborateurs.

Nous sommes en mesure à la fois d'adresser des sujets relatifs à l'expertise des métiers de la Finance (Consulting) et de conduire des projets d'organisation et de transformation (Advisory). Et nous le faisons grâce à la synergie agile de ces deux savoir-faire.

Nos expertises s'exercent dans la conformité réglementaire, la finance quantitative, la fonction finance, la gouvernance des outils & systèmes, le management des risques et les marchés financiers. Au-delà de ce que nous faisons, il y a comment nous le faisons : viser l'excellence et repousser nos limites tout en cultivant la convivialité et en favorisant l'esprit d'équipe.

Nous sommes Awalee : nous sommes AWARE & AWESOME.

Awalee consulting  
59 avenue Marceau  
75016 Paris

 [www.awaleeconsulting.com](http://www.awaleeconsulting.com)

 [twitter.com/awaleeconsulting](https://twitter.com/awaleeconsulting)

 [linkedin.com/awaleeconsulting](https://linkedin.com/awaleeconsulting)