



awalee

Ayoub FENKOUCH  
Consultant Awalee

## RÉDUCTION DE VARIANCE EN MONTE CARLO.

**L'un des premiers outils de finance quantitative que j'ai découvert pendant ma formation est la méthode de Monte Carlo. Dans mes projets, je l'utilisais pour valoriser des produits exotiques. En faisant face à des temps d'exécution de plus de plus grands, je me suis intéressé aux méthodes de réduction de variance.**

V

ous avez certainement déjà entendu parler du modèle de Black Scholes : un cadre mathématique élaboré en 1973 qui permet d'obtenir des formules fermées pour les prix des options d'achat et de vente européennes. Mais pour les autres produits dérivés qui ne rentrent pas dans ce cadre, comment sont-ils valorisés ? Dans ce cas, les analystes quantitatifs ont recours à des méthodes d'approximation numériques, et la plus populaire d'entre elles est certainement la méthode de Monte Carlo.

La méthode de Monte Carlo est une application directe de la loi des grands nombres. Elle permet l'approximation de la valeur d'une espérance en générant un grand nombre de quantités aléatoires (nombre, processus...). Ceci permet d'approximer des quantités difficiles à calculer (à cause de leurs hautes dimensions par exemple). Pour présenter la méthode et ses améliorations, considérons un cas simple : le calcul de l'intégrale d'une fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0,1]$ .

**Cette intégrale peut être exprimée par une espérance comme suit :**

$$I = \int_0^1 f(x)dx = \mathbb{E}[f(U)]$$

Approximer cette intégrale par Monte Carlo revient à générer un grand nombre  $n$  de variables aléatoires  $U_i$  indépendantes de loi uniforme sur  $[0,1]$ , puis évaluer  $f$  en  $U_i$ , et prendre la moyenne de toutes ces valeurs : c'est ce qu'on appelle un estimateur Monte Carlo.

$$\tilde{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(U_i)$$

Cet estimateur a l'avantage d'avoir un biais nul, c'est-à-dire qu'il converge vers  $I$  quand  $n$  devient grand. Par contre, cette convergence est lente (convergence en  $n^{-1/2}$ ). La notion de vitesse de convergence est liée à la variance de l'estimateur :  $Var(\tilde{I}_n) = Var(f(U))/n$  une variance plus petite est synonyme d'une erreur d'approximation plus petite et donc une convergence plus rapide.

Tout l'intérêt des méthodes de réduction de variance est de construire des estimateurs Monte Carlo qui gardent la propriété du biais nul tout en ayant une variance plus petite que celle de  $\tilde{I}_n$ .

La première méthode de réduction de variance est la méthode des variables antithétiques. On continue d'échantillonner à partir de la loi uniforme, mais en relâchant l'hypothèse de l'indépendance. Ceci consiste à générer  $n/2$  variable aléatoire  $U_i$  et de considérer une transformation de ces variables, qu'on notera  $T(U_i)$ , pour ainsi toujours travailler avec un échantillon de taille  $n$ .

En notant  $m_1$  et  $m_2$  les moyennes des  $f(U_i)$  et  $f(T(U_i))$  respectivement, le nouveau estimateur de  $I$  est  $\tilde{I}_{a,n} = (m_1 + m_2)/2$

C'est bien un estimateur sans biais, de variance :  $Var(\tilde{I}_{a,n}) = \frac{Var(f(U)) + cov[f(U), f(T(U))]}{2n}$

On reconnaît la variance de  $\tilde{I}_n$  dans le premier terme. Tout le but de cette méthode est de prendre une transformation  $T$  telle que la covariance est négative, et  $T(U_i)$  a la même loi que  $U_i$ . Ceci est possible en exploitant les symétriques de la loi en question (prendre  $T = 1 - \text{Id}$  pour la loi uniforme sur  $[0,1]$ , et  $T = -\text{Id}$  pour la loi normale centrée réduite). Cette méthode est d'autant plus efficace quand la fonction  $f$  ne présente pas de symétrie sur l'intervalle considéré (si elle est linéaire par exemple).

Une autre méthode de réduction de variance est la méthode des variables de contrôle. Au lieu de s'intéresser à la dépendance des variables aléatoires  $U$ , on s'intéresse dans cette méthode à la fonction  $f$ . L'idée de la méthode est d'introduire une nouvelle fonction  $h$  dont l'intégrale  $m_h$  est connue ou facilement calculable.

$$\text{On considère alors le nouvel estimateur : } \tilde{I}_{cv,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(U_i) - c(h(U_i) - m_h)$$

Avec  $c$  un réel quelconque. On peut montrer que le biais de cet estimateur est nul peu importe la valeur de  $c$ , que sa variance est

$$\text{Var}(\tilde{I}_{cv,n}) = \frac{1}{n} [c^2 \text{Var}(h(U)) + 2c \text{Cov}(f(U), h(U)) + \text{Var}(f(U))]$$

En prenant la valeur optimale de  $c$  ( $c^* = -\text{Cov}(h(U), f(U)) / \text{Var}(h(U))$ ) la variance de l'estimateur devient

$$\text{Var}(\tilde{I}_{cv,n}) = \frac{1}{n} (\text{Var}(f(U)) - \text{Cov}(f(U), h(U))^2 / \text{Var}(h(U)))$$

On reconnaît encore une fois la variance du premier estimateur, et on conclut que l'efficacité de la méthode réside dans le choix d'une fonction  $h$  très corrélée à  $f$ , facilement calculable et d'intégrale connue (le développement de Taylor de  $f$  par exemple). La dernière méthode de réduction de variance que nous verrons est la méthode d'échantillonnage préférentiel (ou importance sampling). L'idée de cette méthode est qu'il n'est pas optimal de générer des variables aléatoires  $U_i$  dans les parties de  $[0,1]$  où la fonction  $f$  est nulle ou quasi nulle. Au lieu d'utiliser la loi uniforme sur  $[0,1]$  (de densité  $w$ ), on choisit alors une loi  $L'$  (de densité  $q$ ) avec plus de réalisation dans les parties où  $f$  est non nulle, puis on pondère ces réalisations pour corriger le changement de loi:

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) w(x) dx = \int_0^1 f(x) \frac{w(x)}{p(x)} p(x) dx = \mathbb{E}[f(U') \frac{w(U')}{p(U')}]$$

Le choix optimal de la densité de probabilité  $p$  est une densité proportionnelle à  $f$ , on peut facilement voir pourquoi, notre nouvel estimateur étant

$$\tilde{I}_{is,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(U'_i) / p(U'_i)$$

si  $p$  est proportionnelle à  $f$  alors leur rapport est une constante, donc de variance nulle.

**Pour conclure, les méthodes de Monte Carlo sont des méthodes statistiques incontournables dans le monde de la finance quantitative. Ces méthodes ont souvent un coup computationnel élevé, ce qui a motivé la construction de nouveaux estimateurs en s'intéressant à la loi des variables aléatoires utilisées (méthode d'échantillonnage préférentiel), à leur dépendance (méthode des variables antithétiques), ou encore à la fonction objectif (méthode des variables de contrôle). Tout le défi réside dans la bonne adaptation de ces méthodes et de leurs variables au problème qu'on essaye de résoudre. Ceci nécessite une bonne connaissance fonctionnelle et donne naissance par exemple, à des problèmes d'optimisation.**



Ayoub FENKOUCH  
Consultant Awalee

Diplômé de l'ENSIMAG et d'un Master en analyse quantitative, Ayoub a eu l'occasion de travailler lors de ses projets et stages sur du risque de contrepartie, notamment sur du paramétrage de modèles. Actuellement, Ayoub travaille au sein de la R&D Front en tant qu'analyste quantitatif sur de l'optimisation de collatéral.