

# AWALEE NOTES



Le modèle à volatilité locale stochastique II

Méthode de calibration

Dongli W / Xijun W / Benjamin V

# Table des matières

1. Rappels sur le modèle à volatilité locale stochastique	3
a. Présentation du modèle	3
b. Lien entre le terme correcteur $A(t, S_t)$ et la volatilité locale $\sigma_{Loc}$	3
i. Remarque	3
2. Calibration du modèle par la méthode d'EDP de Fokker-Planck	3
3. Calibration par la méthode de projection markovienne	3
a. Théorème de (Gyöngy, 1986)	3
i. Enoncé	3
ii. Interprétation	4
b. Application à la calibration du modèle à VLS	4
i. Introduction du modèle à VLS proxy	4
ii. Hypothèse constante	4
iii. Hypothèse $X_t = H(t, S_t)$	5
4. Calibration par la méthode des particules	5
5. Conclusion	6
Bibliographie	

Cette deuxième Note Quant sur le modèle à volatilité locale stochastique porte sur ses méthodes de calibration. Dans une première partie, nous montrons comment le modèle à volatilité locale stochastique peut être calibré grâce à son EDP de Fokker-Planck. Dans la seconde partie, nous présentons l'approche dite de projection markovienne. Sous quelques hypothèses simplificatrices, celle-ci permet de calibrer le modèle à volatilité locale stochastique efficacement. Enfin, nous présentons dans la troisième partie la calibration de la volatilité locale stochastique par la méthode des particules, qui s'avère être à l'heure actuelle un choix particulièrement judicieux.



# AWALEE NOTES

## 1. RAPPELS SUR LE MODÈLE À VOLATILITÉ LOCALE STOCHASTIQUE

### a. Présentation du modèle

Nous rappelons ci-dessous que le modèle à volatilité locale stochastique est défini par le système d'EDS suivant :

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = A(t, S_t)f(V_t)dW_t^1 \\ dV_t = a(t, V_t)dt + \gamma(t, V_t)dW_t^2 \\ d < W_t^1, W_t^2 > = \rho dt \end{cases} \quad (1)$$

Ce modèle peut être considéré comme une amélioration des modèles à volatilité stochastique, car la fonction  $A(t, S_t)$  permet de corriger le gap entre le smile de volatilité implicite engendré par le modèle à volatilité stochastique et les volatilités implicites du marché.

Dans la suite de cette note, nous nous concentrerons sur comment, une fois les paramètres de la partie stochastique de la volatilité donnés, calibrer le terme correcteur  $A(t, S_t)$  grâce aux prix des options vanilles disponibles sur le marché.

### b. Lien entre le terme correcteur $A(t, S_t)$ et la volatilité locale $\sigma_{Loc}$

Lorsque le modèle (1) est calibré de telle sorte à reproduire les prix des options vanilles du marché,  $A(t, S_t)$  et la volatilité implicite du marché (donnée par la formule de Dupire)  $\sigma_{Loc}(t, K)$  sont reliés par la formule suivante :

$$\begin{cases} \frac{dX_t}{X_t} = \tilde{A}(t, X_t)f(V_t)dW_t^1 \\ dV_t = a(t, V_t)dt + \gamma(t, V_t)dW_t^2 \end{cases} \quad (2)$$

Nous voyons ici qu'il est nécessaire d'estimer le terme  $E[f(V_T)^2 | S_T=K]$  pour calibrer le terme  $A(t, S_t)$  à la volatilité implicite du marché. Une des difficultés ici sera le calcul de l'espérance conditionnelle  $E[f(V_T)^2 | S_t=K]$ , étant donné que la loi jointe de  $V_t$  et  $S_t$  n'est pas connue.

Pour estimer ce terme, nous verrons dans une première partie qu'il est possible d'employer la méthode par EDP de Fokker-Planck. Dans une seconde partie, nous montrerons qu'en faisant quelques hypothèses simplificatrices, il est également possible d'utiliser la méthode par projection markovienne pour approximer directement  $A(t, S_t)$ . Enfin, nous verrons dans une dernière partie que la méthode des particules permet d'estimer  $E[f(V_T)^2 | S_t=K]$  efficacement.

## 2. CALIBRATION DU MODÈLE PAR LA MÉTHODE D'EDP DE FOKKER-PLANCK

Cette méthode part de l'observation suivante : grâce à la connaissance de la loi jointe des deux variables  $S_t$  et  $V_t$ , nous pouvons déduire l'espérance conditionnelle  $E[f(V_T)^2 | S_T=K]$  recherchée.

Ainsi, intéressons-nous à la densité de probabilité jointe  $p(t, s, v)$  des variables  $S_t$  et  $V_t$ . Cette densité satisfait l'équation de Fokker-Planck de dimension 2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(t, s, v)}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} [A(t, s)^2 f(v)^2 s^2 p(t, s, v)] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} [\gamma(t, v)^2 p(t, s, v)] \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial s \partial v} [\rho A(t, s) f(v) \gamma(t, v) s p(t, s, v)] \\ &- \frac{\partial}{\partial s} [r s p(t, s, v)] - \frac{\partial}{\partial v} [a(t, v) p(t, s, v)] \end{aligned} \quad (3)$$

Avec comme condition initiale  $p(t, s, v) \rightarrow \delta(s - S_0) \delta(v - V_0)$  quand  $t \rightarrow 0$ .

Cette EDP linéaire de dimension 2 peut être résolue numériquement par la méthode de splitting ADI (Alternating Direction Implicit), qui est une méthode des différences finies efficace pour résoudre les EDP à plusieurs dimensions.

La solution numérique de cette EDP nous permet alors de calculer l'espérance conditionnelle que l'on cherche au travers de la formule de bayes :

$$E [f(V_T)^2 | S_T = K] = \frac{\int_0^{+\infty} f(v)^2 p(t, K, v) dv}{\int_0^{+\infty} p(t, K, v) dv}$$

## 3. CALIBRATION PAR LA MÉTHODE DE PROJECTION MARKOVIENNE

### a. Théorème de (Gyöngy, 1986)

#### i. Enoncé

Avant de revenir au problème de la calibration de  $A(t, S_t)$ , introduisons le théorème suivant, essentiel pour la compréhension de la méthode :

Théorème : (Gyöngy, 1986)

Soit  $(X_t)$  un processus stochastique respectant l'EDS :

$$dX_t = \alpha_t dt + \beta_t dW_t \quad (4)$$

Où  $\alpha_t$  et  $\beta_t$  sont des processus stochastiques adaptés tels que (4) ait une solution unique.

Définissons  $a(t,x)$ ,  $b(t,x)$  par :

$$\begin{aligned} a(t,x) &= E[\alpha_t | X_t = x] \\ b^2(t,x) &= E[\beta_t^2 | X_t = x] \end{aligned}$$

Alors l'EDS :

$$\begin{cases} dY_t = a(t, Y_t)dt + b(t, Y_t)dW_t \\ Y_0 = X_0 \end{cases}$$

Admet une solution faible  $Y_t$  qui a la même loi marginale que  $X_t$ .

## ii. Interprétation

Dans le théorème précédent, le processus  $(X_t)$  suit une EDS où les coefficients  $\alpha_t$  et  $\beta_t$  peuvent être stochastiques. Ainsi,  $(X_t)$  peut suivre un modèle à volatilité stochastique quelconque. Par contre, on voit dans la définition du processus  $(Y_t)$  que celui-ci suit une évolution donnée par un modèle à volatilité locale car  $a$  et  $b$  sont des fonctions déterministes de  $t$  et  $Y_t$ .

Le résultat du théorème est que les processus  $(X_t)$  et  $(Y_t)$  ont la même loi marginale. En termes financiers, cela signifie qu'ils donnent les mêmes prix pour l'ensemble des options vanilles européennes.

Le processus  $(Y_t)$  est donc un processus à volatilité locale reproduisant les prix des options européennes produits par le modèle à volatilité stochastique  $(X_t)$ . On appelle alors le processus  $(Y_t)$  la projection markovienne du processus  $(X_t)$ .

## b. Application à la calibration du modèle à VLS

### i. Introduction du modèle à VLS proxy

Comme remarqué dans la note Quant précédente : « Le Modèle à Volatilité Locale Stochastique I », connaître l'ensemble des prix des options européennes sur un sous-jacent  $S_t$  revient à connaître les lois marginales de  $(S_t)$ . Ainsi, si deux modèles à volatilité stochastique donnent les mêmes lois marginales pour  $(S_t)$ , ces deux modèles donneront les mêmes prix pour les options européennes.

Ainsi, pour calibrer le modèle à volatilité locale stochastique (1) donné par :

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = A(t, S_t)f(V_t)dW_t^1 \\ dV_t = a(t, V_t)dt + \gamma(t, V_t)dW_t^2 \\ d < W_t^1, W_t^2 > = \rho dt \end{cases} \quad (1)$$

Nous allons introduire un processus « proxy » à volatilité locale stochastique :

$$\begin{cases} \frac{dX_t}{X_t} = \tilde{A}(t, X_t)f(V_t)dW_t^1 \\ dV_t = a(t, V_t)dt + \gamma(t, V_t)dW_t^2 \\ d < W_t^1, W_t^2 > = \rho dt \end{cases} \quad (5)$$

Mais ici, contrairement au modèle de départ (1) où la fonction  $A(\dots)$  est une fonction à calibrer, nous allons choisir nous même une fonction  $\tilde{A}(\dots)$  très simple. Typiquement, on peut choisir  $\tilde{A}(t,x)$  linéaire :

$$\tilde{A}(t,x) = \alpha x + \beta$$

Grâce à ce choix de fonction  $\tilde{A}(\dots)$ , il est possible de calculer la volatilité implicite  $\sigma_{Loc}^{proxy}$  induite par le modèle proxy soit par la formule fermée donnée par (Labordère, 2009), soit par méthode de Monte-Carlo.

En appliquant le théorème de Gyöngy au processus  $(X_t)$ , la volatilité implicite  $\sigma_{Loc}^{proxy}$  de la projection markovienne du modèle proxy est donnée par :

$$(\sigma_{Loc}^{proxy}(t, K))^2 = \tilde{A}(t, K)^2 E[f(V_t)^2 | X_t = K]$$

En supposant que le modèle (1) est calibré sur les prix de marché des options vanilles, en appliquant ce même théorème au processus  $(S_t)$ , nous obtenons :

$$(\sigma_{Loc}^{marché}(t, K))^2 = A(t, K)^2 E[f(V_t)^2 | S_t = K]$$

Ainsi, lorsque la fonction  $A(\dots)$  du modèle (1) est calibrée afin de reproduire la volatilité implicite du marché  $\sigma_{Loc}^{marché}$ , la relation entre  $A$ ,  $\tilde{A}$ ,  $\sigma_{Loc}^{proxy}$ ,  $\sigma_{Loc}^{marché}$  est donnée par (Piterbarg, 2006) :

$$A(t, K)^2 = \tilde{A}(t, K)^2 \frac{(\sigma_{Loc}^{marché}(t, K))^2 E[f(V_t)^2 | X_t = K]}{(\sigma_{Loc}^{proxy}(t, K))^2 E[f(V_t)^2 | S_t = K]} \quad (6)$$

Au travers de cette équation, la complexité de la calibration de la fonction  $A(\dots)$  a été transférée dans le terme  $\frac{E[f(V_t)^2 | X_t = K]}{E[f(V_t)^2 | S_t = K]}$ .

Afin d'obtenir une calibration utilisable en pratique, il est alors nécessaire de faire des hypothèses simplificatrices sur ce terme.

### ii. Hypothèse constante

Une première hypothèse pouvant être faite est :

$$\frac{E[f(V_t)^2 | X_t = K]}{E[f(V_t)^2 | S_t = K]} \approx 1$$

L'équation (6) devient alors :

$$A(t, K)^2 = \tilde{A}(t, K)^2 \frac{(\sigma_{Loc}^{marché}(t, K))^2}{(\sigma_{Loc}^{proxy}(t, K))^2} \quad (7)$$

Cette équation permet alors de calibrer le paramètre  $A(\dots)$  directement.

### iii. Hypothèse $X_t = H(t, S_t)$

Dans le cas où l'on a choisi pour  $\check{A}(\dots)$  la fonction  $\check{A}(t, K)=1$ , une autre hypothèse plus fine faite par (Labordère, 2009) et (Piterbarg, 2006) est que  $S_t$  et  $X_t$  sont liés par :

$$X_t = H(t, S_t) \quad (8)$$

Où  $H$  est supposée lisse.

Sous cette hypothèse, (Labordère, 2009) montre que :

$$A(T, s) = \frac{\sigma_{Loc}^{marché}(T, s)}{\sigma_{Loc}^{proxy} \left( T, \phi_T^{-1} \left( \int_{S_0}^S \frac{dx}{x \sigma_{Loc}^{marché}(T, x)} \right) \right)} \quad (9)$$

Où  $\phi_T$  est donné par :

$$\phi_T(x) = \int_{\Lambda(T)}^x \frac{dy}{y \sigma_{Loc}^{proxy}(T, y)}$$

#### 1. Preuve de la formule (9)

En appliquant la formule d'Itô à (8) et d'après l'EDS du modèle (1), nous avons l'équation suivante :

$$dX_t = S_t \partial_x H(t, S_t) A(t, V_t) f(V_t) dW_t^1 + \left( \partial_t H(t, S_t) + \frac{1}{2} S_t^2 \partial_x^2 H(t, S_t) A(t, S_t)^2 f^2(V_t) \right) dt$$

En identifiant les termes devant  $dW_t^1$  avec l'EDS (5) régissant  $(X_t)$ , nous obtenons :

$$x \partial_x H(t, x) A(t, x) = H(t, x)$$

On a donc :

$$\partial_x \ln H(t, x) = \frac{1}{xA(t, x)} \quad (10)$$

Or, (Piterbarg, 2006) a montré que :

$$\sigma_{Loc}^{marché}(t, x) = A(t, x) \sigma_{Loc}^{proxy}(t, H(t, x)) \quad (11)$$

En utilisant (10) et (11), on obtient alors :

$$x \partial_x \ln H(t, x) = \frac{\sigma_{Loc}^{proxy}(t, H(t, x))}{\sigma_{Loc}^{marché}(t, x)} \quad (12)$$

Par ailleurs, par définition de  $\phi_T$  :

$$\phi_T(H(T, s)) = \int_{\Lambda(T)}^{H(T, s)} \frac{dy}{y \sigma_{Loc}^{proxy}(T, y)}$$

En effectuant le changement de variable  $y = H(T, x)$  on a :

$$\phi_T(H(T, s)) = \int_{S_0}^s \frac{\partial_x \ln(H(T, x))}{\sigma_{Loc}^{proxy}(T, H(T, x))} dx$$

En utilisant (12), on a alors :

$$\phi_T(H(T, s)) = \int_{S_0}^s \frac{\frac{\sigma_{Loc}^{proxy}(T, H(T, x))}{x \sigma_{Loc}^{marché}(T, x)} dx}{\sigma_{Loc}^{proxy}(T, H(T, x))}$$

En simplifiant, on obtient :

$$\phi_T(H(T, s)) = \int_{S_0}^s \frac{dx}{x \sigma_{Loc}^{marché}(T, x)}$$

En utilisant (11), on obtient alors :

$$\begin{aligned} A(T, s) &= \frac{\sigma_{Loc}^{marché}(T, s)}{\sigma_{Loc}^{proxy}(T, H(T, s))} \\ &= \frac{\sigma_{Loc}^{marché}(T, s)}{\sigma_{Loc}^{proxy} \left( T, \phi_T^{-1} \left( \int_{S_0}^s \frac{dx}{x \sigma_{Loc}^{marché}(T, x)} \right) \right)} \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve.

#### 2. Remarque 1

La formule (9) fait intervenir la distance géodésique (c'est-à-dire la moyenne harmonique) entre la volatilité locale du marché  $\sigma_{Loc}^{marché}(T, s)$  et la volatilité locale effective du modèle proxy  $\sigma_{Loc}^{proxy}$ .

#### 3. Remarque 2

Dans la formule (9), l'intégrale peut se calculer avec des méthodes de quadrature, et l'inversion de la fonction peut se faire en utilisant l'algorithme Brent.

### 4. CALIBRATION PAR LA MÉTHODE DES PARTICULES

La méthode des particules peut être utilisée pour la calibration du modèle à volatilité locale stochastique. Pour ce faire, regardons le modèle (1), en y incorporant l'équation (2). On obtient alors le système :

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = \frac{\sigma_{Loc}(t, S_t)}{\sqrt{E^Q[f(V_t)^2 | S_t]}} f(V_t) dW_t^1 \\ dV_t = a(t, V_t) dt + \gamma(t, V_t) dW_t^2 \\ d < W_t^1, W_t^2 > = \rho dt \end{cases} \quad (13)$$

La première équation de ce système est en réalité une EDS de McKean. Pour rappel, une EDS de McKean est une équation différentielle non-linéaire, où le drift et la volatilité dépendent non seulement du temps  $t$  et de la valeur actuelle  $X_t$  du processus, mais aussi de la loi de probabilité  $Q_t$  de  $X_t$  :

$$dX_t = b(t, X_t, Q_t) dt + \sigma(t, X_t, Q_t) dW_t$$

Dans le cas du système (13), le drift  $b$  est nul, mais la volatilité  $\sigma(t, X_t, Q_t)$  est égale à  $\frac{\sigma_{Loc}(t, S_t)}{\sqrt{E^Q[f(V_t)^2 | S_t]}} f(V_t)$

Pour résoudre ce type d'équation, la méthode des particules consiste habituellement à approcher la loi de

probabilité  $Q_t$  par une distribution empirique :

$$Q_t^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_t^{i,N}}$$

Où les  $X_t^{i,N}$  sont donnés en résolvant le système à  $N$  équations :

$$dX_t^{i,N} = b(t, X_t^{i,N}, Q_t^N)dt + \sigma(t, X_t^{i,N}, Q_t^N)dW_t^i$$

Nous remarquons que les  $N$  trajectoires ( $X_t^{i,N}$ ) interagissent entre elles au travers de la loi de probabilité  $Q_t^N$ . En physique, cela correspond à un système de  $N$  particules, dont les trajectoires évoluent en interagissant les unes avec les autres. C'est cette origine qui a donné le nom à la méthode. Ce point différencie la méthode des particules de la méthode de Monte-Carlo, car dans cette dernière, les trajectoires simulées n'interagissent pas entre elles.

Pour notre cas, l'atomicité de la loi de probabilité  $Q_t^N$  poserait des problèmes lors de la définition de notre estimateur pour l'espérance conditionnelle située au dénominateur de l'équation (13). De ce fait, (Guyon & Henry-Labordère, 2013) proposent d'utiliser une suite de noyaux de régularisation  $\delta_{t,N}(x) = \frac{1}{h_{t,N}} K\left(\frac{x}{h_{t,N}}\right)$  à la place des  $\delta_{X_t^{i,N}}$ . Il suffit alors de simuler  $N$  trajectoires en suivant le système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{dS_t^{i,N}}{S_t^{i,N}} = \frac{\sigma_{Loc}(t, S_t^{i,N})}{\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N f(V_t^{j,N})^2 \delta_{t,N}(S_t^{j,N} - S_t^{i,N})}{\sum_{j=1}^N \delta_{t,N}(S_t^{j,N} - S_t^{i,N})}}} f(V_t^{i,N}) dW_t^{i,1} \\ dV_t^{i,N} = a(t, V_t^{i,N})dt + \gamma(t, V_t^{i,N}) dW_t^{i,2} \\ d < W_t^{i,1}, W_t^{i,2} > = \rho dt \end{cases}$$

Le noyau de régularisation  $K$  doit être symétrique et avec une bande passante  $h_{t,N}$  qui tend vers 0 lorsque  $N$  tend vers  $\infty$ .

(Guyon & Henry-Labordère, 2013) utilisent comme noyau:

$$K(x) = \frac{15}{16} (1 - x^2)^2 \mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}}$$

La vitesse de convergence de cette méthode est alors en  $1/\sqrt{N}$ . La démonstration de cette vitesse de convergence ainsi que plus de détails concernant le choix du noyau de régularisation peuvent être trouvés dans (Guyon & Henry-Labordère, 2013).

## 5. CONCLUSION

Tout comme le modèle à volatilité locale de Dupire, le modèle à volatilité locale et stochastique peut être calibré afin de reproduire exactement les prix de marché des options vanilles. Cela se fait en introduisant une fonction

correctrice de volatilité locale qui permet de modifier les lois marginales du sous-jacent.

Cependant, la calibration de cette fonction n'est pas évidente puisqu'elle nécessite la connaissance de la loi jointe du sous-jacent et de la volatilité du modèle. Nous avons présenté trois approches permettant de calibrer cette fonction.

La première, basée sur l'EDP de Fokker-Planck, est standard. Elle donne de bons résultats, mais devient difficile à utiliser en dimensions élevées.

La deuxième méthode, par projection markovienne, utilise des approximations qui permettent de contourner le calcul d'espérance conditionnelle. Cette méthode est efficace pour certains cas, mais manque d'une analyse d'erreur qui permettrait de généraliser sans crainte sa pratique, en particulier lors de l'utilisation de modèles à taux stochastiques.

La dernière méthode, dite des particules, est à la fois efficace et robuste. C'est aujourd'hui la méthode la plus employée.

## BIBLIOGRAPHIE

Dupire, B., 1993. Pricing and Hedging with Smiles. Paribas Capital Markets.

Dupire, B., 1994. Pricing with a Smile. Risk.

Guyon, J. & Henry-Labordère, P., 2013. Nonlinear Option Pricing. s.l.:CRC Press.

Gyöngy, I., 1986. Mimicking the One-Dimensional Marginal Distributions of Processes Having an Ito Differential. Probability Theory and Related Fields, pp. 501-516.

Labordère, P.-H., 2009. Calibration of Local Stochastic Volatility Models to Market Smiles: A Monte-Carlo Approach. Risk.

Labordère, P. H., 2012. Being particular about calibration. Risk, pp. 92-97.

Piterbarg, V., 2006. Markovian Projection Method for Volatility Calibration.

Willem van der Stoep, A., Grzelak, L. A. & Oosterlee, C. L., 2014. The Heston Stochastic-Local Volatility Model: Efficient Monte Carlo Simulation. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 17(7).

