

AWALEE NOTES



Le modèle à volatilité locale stochastique I

Présentation du modèle

Dongli W / Xijun W / Benjamin V

Table des matières

1. Introduction : les différents modèles de volatilités	3
2. Rappels sur le modèle à volatilité locale	3
a. Lien entre les lois marginales $\Phi(t,.)$ de (S_t) et les prix des options vanilles	3
b. Formule de Dupire	4
i. Démonstration de la formule de Dupire	4
3. Rappels sur le modèle à volatilité stochastique	4
4. Le modèle à volatilité locale stochastique	4
a. Présentation du modèle	4
b. Lien entre le terme correcteur $A(t,St)$ et la volatilité locale σ_{Loc}	5
i. Démonstration	5
ii. Remarque 1	5
iii. Remarque 2	5
5. Conclusion	6
Bibliographie	6

Le modèle à volatilité locale réplique bien le smile observé sur le marché des options vanilles, mais ne capte pas la dynamique de celui-ci. Les modèles à volatilité stochastique arrivent à bien modéliser cette dynamique, mais leurs calibrations sur les prix des options vanilles sont souvent insatisfaisantes. Après un rappel des modèles à volatilité locale et à volatilité stochastique, nous présentons dans cette Note Quant le modèle à volatilité locale stochastique. Ce modèle hybride inclut à la fois une volatilité stochastique et un terme correcteur de volatilité locale permettant de reproduire fidèlement les prix des options vanilles. Nous montrons quel doit être le lien entre ce terme correcteur, la volatilité implicite donnée par le modèle à volatilité stochastique choisi, et la volatilité implicite donnée par le marché. Les méthodes de calibration adaptées à ce modèle figureront dans la Note Quant suivante : Le modèle à volatilité locale stochastique II.



AWALEE NOTES

1. INTRO : LES DIFFÉRENTS MODÈLES DE VOLATILITÉS

Dans le modèle de Black & Scholes, la volatilité est supposée constante. Cependant, cette hypothèse ne reflète pas les prix des options vanilles observés sur les marchés financiers. En particulier, deux faits stylisés viennent la contredire. Premièrement, on constate une asymétrie (skew) de la volatilité implicite en fonction du strike K et une surprime de celle-ci au niveau des options vanilles très en dehors de la monnaie. On résume cette observation par le terme de « smile ». On observe deuxièmement que la volatilité ainsi que ce smile évoluent dans le temps. On nomme cela la dynamique du smile.

Pour reproduire ces effets, plusieurs modèles de volatilité ont été proposés. En particulier, le modèle à volatilité locale et les modèles à volatilité stochastique sont très utilisés.

Le modèle à volatilité locale suppose que la volatilité est une fonction déterministe du prix du sous-jacent S_t et du temps t . Elle s'écrit alors sous la forme $\sigma(t, S_t)$. D'après la formule de Dupire (Dupire, 1994), la volatilité locale peut être calibrée de façon à reproduire exactement les prix des options vanilles observés sur les marchés. Ainsi, ce modèle représente très bien la structure statique du smile donnée par les options vanilles, ce qui correspond mathématiquement à bien représenter la loi marginale du processus (S_t) . Pour cette raison, c'est aujourd'hui le modèle le plus utilisé par les institutions financières. Mais le modèle à volatilité locale représente mal à la fois la loi-jointe du processus (S_t) et la dynamique du smile. En particulier, ce modèle donne des volatilités forward trop plates. Il n'est de ce fait pas adapté pour pricer des produits dérivés dépendant fortement de la trajectoire du sous-jacent.

Les modèles à volatilités stochastiques, tels le modèle de Heston, sont alors une bonne alternative. Ces derniers reproduisent beaucoup mieux la dynamique du smile et la loi-jointe du processus (S_t) , car la volatilité y est elle-même un processus stochastique. Ainsi, ils donnent en général des meilleurs prix pour les options exotiques dépendant fortement de la trajectoire du sous-jacent. Mais contrairement au modèle à volatilité locale, la calibration des modèles à volatilités stochastiques sur les prix de marché des options vanilles n'est pas toujours satisfaisante. Ce point est particulièrement gênant lors de l'élaboration des couvertures de produits dérivés exotiques,

car celles-ci nécessitent en général de prendre des positions sur les options vanilles. Ainsi, obtenir des prix précis pour les options vanilles est un point essentiel pour la couverture de ce type de produit.

Afin d'avoir les avantages des deux modèles, un modèle hybride appelé modèle à volatilité locale et stochastique est devenu populaire. Comme son nom l'indique, la volatilité donnée par ce modèle contient à la fois un terme correspondant à une volatilité stochastique et un terme correspondant à une partie locale de la volatilité, ce qui permet au modèle de bien reproduire le smile donné par les options vanilles.

2. RAPPELS SUR LE MODÈLE À VOLATILITÉ LOCALE

a. Lien entre les lois marginales $\varphi(t, \cdot)$ de (S_t) et les prix des options vanilles

Pour bien comprendre le modèle à volatilité locale, il est bon de remarquer que l'information correspondant à l'ensemble des prix des options vanilles $C(T, K)$ pour toutes les maturités T et les strikes K permet de retrouver les distributions marginales du processus de prix du sous-jacent $(S_t)_{t \geq 0}$ sous la probabilité risque neutre.

En effet, en supposant que le processus (S_t) admette pour chaque instant t , une loi marginale $\varphi(t, \cdot)$ sous la mesure risque neutre Q , et par souci de simplicité, que le taux d'intérêt est nul, on a par définition de la mesure risque neutre :

$$C(T, K) = \int_0^{\infty} (x - K)^+ \varphi(T, x) dx$$

En dérivant deux fois par rapport au strike K on obtient alors :

$$\varphi(T, K) = \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(T, K) \quad (1)$$

Prenons ici note d'un point important permettant de bien comprendre les limites du modèle à volatilité locale. La loi $\varphi(T, \cdot)$ que nous obtenons est celle de S_T . Mais cette loi ne nous permet pas de trouver la loi jointe $\varphi(T_1, T_2, \dots)$ du couple (S_{T_1}, S_{T_2}) . Ainsi, bien que la loi marginale du processus (S_t) soit donnée par la connaissance de tous les prix des options vanilles, cette information ne permet pas d'obtenir les lois jointes du processus (S_t) . C'est ce point qui rend le modèle à volatilité locale inadapté pour évaluer les prix d'options dépendant fortement de la

trajectoire du sous-jacent.

b. Formule de Dupire

Maintenant, supposons que (S_t) est un processus markovien suivant l'EDS :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma_{Loc}(t, S_t) dW_t \quad (2)$$

Où $\sigma_{Loc}(\cdot, \cdot)$ est à priori une fonction quelconque.

Dupire (Dupire, 1994) a montré qu'il n'existe qu'un seul choix de fonction pour $\sigma_{Loc}(\cdot, \cdot)$ tel que les distributions marginales du processus (S_t) correspondent à celles données par les prix des options vanilles du marché au travers de la formule (1).

Le lien entre la volatilité locale $\sigma_{Loc}(t, S_t)$ et les prix des options vanilles est alors donné par la formule de Dupire (Dupire, 1994). Lorsque le taux d'intérêt est nul, celle-ci donne :

$$\sigma_{Loc}^2(T, K) = \frac{\frac{\partial C(T, K)}{\partial T}}{\frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 C(T, K)}{\partial K^2}} \quad (3)$$

i. Démonstration de la formule de Dupire

La dynamique de diffusion (2) engendre une densité de diffusion de x au temps s à y au temps t , notée $\phi(s, x; t, y)$

$$\phi(s, x; t, y) = \frac{P(y < S_t < y + dy | S_s = x)}{dy}$$

En fixant le point de départ à $(0, S_0)$, notons $\varphi(T, K) = \Phi(0, S_0; T, K)$.

$\varphi(\cdot, \cdot)$ satisfait alors l'EDP dite de Kolmogorov forward ou de Fokker-Planck suivante (Jeanblanc, et al., 2009) :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (K^2 \sigma_{Loc}^2(T, K) \varphi(T, K))}{\partial K^2} = \frac{\partial \varphi(T, K)}{\partial T} \quad (4)$$

En combinant les équations (1) et (4), on obtient alors :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial K^2} \left[K^2 \sigma_{Loc}^2(T, K) \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(T, K) \right] = \frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(T, K)$$

Ce qui achève la démonstration de la formule de Dupire (3).

Dans la suite de ce document, $\sigma_{Loc}(\cdot, \cdot)$ sera toujours la fonction de volatilité locale calibrée par la formule de Dupire sur les prix des options vanilles du marché. $\sigma_{Loc}(\cdot, \cdot)$ ne jouera donc pas le rôle d'un paramètre, mais celui d'un input donné par les prix de marchés des options vanilles.

3. RAPPELS SUR LE MODÈLE À VOLATILITÉ STOCHASTIQUE

Pour traiter les options dépendant de la trajectoire,

autrement dit, de la distribution jointe de la diffusion (S_t) du prix du sous-jacent, on doit aller au-delà du modèle à volatilité locale. Le modèle le plus utilisé est le modèle à volatilité stochastique. Dans ce modèle, deux diffusions décrivent respectivement les dynamiques du prix du sous-jacent et sa volatilité.

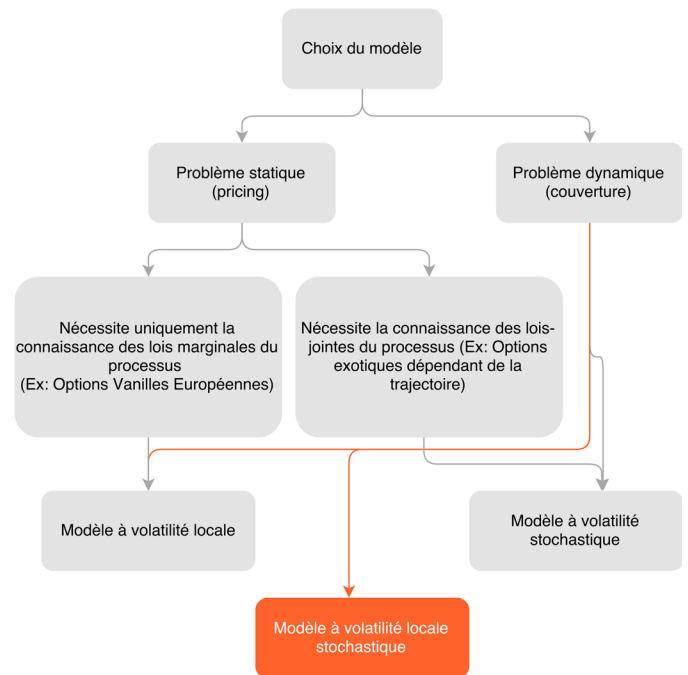
Ainsi, ce modèle est défini par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = f(V_t) dW_t^1 \\ dV_t = a(t, V_t) dt + \gamma(t, V_t) dW_t^2 \\ d \langle W_t^1, W_t^2 \rangle = \rho dt \end{cases} \quad (5)$$

Comme précisé dans l'introduction, la calibration de ce modèle sur les prix des options vanilles du marché n'est en général pas satisfaisante.

En effet, pour la couverture de produits dérivés exotiques, il est habituel de prendre des positions non seulement sur le sous-jacent mais aussi les options vanilles.

De ce fait, la cohérence entre les prix des options vanilles et les paramètres du modèle est importante pour le trader. Le modèle à volatilité locale et stochastique a été introduit pour pallier ce problème.



4. LE MODÈLE À VOLATILITÉ LOCALE STOCHASTIQUE

a. Présentation du modèle

Le modèle à volatilité locale stochastique est défini par le système d'EDS suivant:

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = A(t, S_t) f(V_t) dW_t^1 \\ dV_t = a(t, V_t) dt + \gamma(t, V_t) dW_t^2 \\ d \langle W_t^1, W_t^2 \rangle = \rho dt \end{cases} \quad (6)$$

Les différents termes sont :

S_t : Le processus de prix du sous-jacent.

$A(t, S_t)$: Fonction de t et de S_t , qui permet d'incorporer dans la volatilité du modèle une composante liée à la volatilité locale.

V_t : Terme dont est issue la composante stochastique de la variance .

$f(\cdot)$: Fonction qui fait le lien entre le terme de variance et la partie stochastique de la volatilité.

ρ : Corrélacion entre les deux mouvements browniens.

L'EDS régissant le processus V_t et la fonction f peuvent être choisies parmi les modèles à volatilité stochastique populaires. Par exemple, dans le cas particulier du modèle de Heston, la fonction f correspondrait à $f(x) = \sqrt{x}$, et V_t serait un processus CIR, ce qui donnerait $a(t,x) = \kappa(\theta-x)$ et $\gamma(t,x) = \xi\sqrt{x}$.

Ainsi, le modèle à volatilité locale stochastique peut être considéré comme une amélioration des modèles à volatilités stochastiques, car la fonction $A(t,S_t)$ permet de corriger le gap entre le smile de volatilité implicite engendré par le modèle à volatilité stochastique (5) et les volatilités implicites du marché.

A partir de maintenant, ainsi que dans la Note Quant suivante, nous nous concentrerons sur comment, une fois les paramètres de la partie stochastique de la volatilité donnés, calibrer le terme correcteur $A(t, S_t)$ grâce aux prix des options vanilles disponibles sur le marché.

b. Lien entre le terme correcteur $A(t,S_t)$ et la volatilité locale σ_{Loc}

Lorsque le modèle à VLS (volatilité locale stochastique) (6) est calibré aux prix des options vanilles disponibles sur les marchés, (Labordère, 2009) montre que $A(t,S_t)$ et $\sigma_{Loc}^2(t, K)$ doivent être reliés par la formule suivante :

$$A(t, S_t)^2 = \frac{\sigma_{Loc}^2(t, K)}{E[f(V_t)^2 | S_t = K]} \quad (7)$$

i. Démonstration

La preuve de (7) utilise la formule de Tanaka-Meyer, qui est une extension de la formule d'Itô aux fonctions convexes. En appliquant la formule de Tanaka-Meyer au processus $(S_t - K)^+$, on obtient :

$$\begin{aligned} (S_T - K)^+ &= (S_0 - K)^+ + \int_0^T 1_{\{S_u - K\}} dS_u \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \delta_{\{S_u - K\}} d \langle S \rangle_u \end{aligned}$$

Où δ est la distribution de Dirac.

En prenant l'espérance de cette équation, le premier

terme comportant une intégrale disparaît. Ensuite, en substituant $d \langle S \rangle_u^2$ par sa valeur donnée par l'EDS du modèle (6), on obtient :

$$\begin{aligned} C(T, K) &= (S_0 - K)^+ \\ &\quad + \frac{1}{2} E \int_0^T \delta_{\{S_u - K\}} [S_u A(u, S_u) f(V_u)]^2 du \end{aligned}$$

En différenciant, cela nous donne:

$$dC(T, K) = d \left(E \left[\frac{1}{2} \int_0^T \delta_{\{S_u - K\}} [S_u A(u, S_u) f(V_u)]^2 du \right] \right)$$

Soit:

$$dC(T, K) = \frac{1}{2} E [\delta_{\{S_T - K\}} [S_T A(T, K) f(V_T)]^2] dT \quad (8)$$

Calculons l'espérance apparaissant dans (8) en introduisant la loi marginale $\varphi_T(s, v)$ du processus (S_t, V_t) :

$$\begin{aligned} &E[\delta_{\{S_T - K\}} (S_T A(T, K) f(V_T))^2] \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} \delta_{\{s - K\}} [s A(T, K) f(v)]^2 \varphi_T(s, v) ds dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(v)^2 \int_{\mathbb{R}} \delta_{\{s - K\}} (s A(T, K))^2 \varphi_T(s, v) ds dv \end{aligned}$$

Par les propriétés de la distribution de Dirac, on obtient alors :

$$= \int_{\mathbb{R}} f(v)^2 (K A(T, K))^2 \varphi_T(K, v) dv$$

En notant comme dans l'introduction $\varphi(T, \cdot)$ la loi de S_T et par définition de l'espérance conditionnelle, on obtient alors :

$$\begin{aligned} &E[\delta_{\{S_T - K\}} (S_T A(T, K) f(V_T))^2] \quad (9) \\ &= K^2 A^2(T, K) \varphi(T, K) E[f(V_T)^2 | S_T = K] \end{aligned}$$

En appliquant la formule (1), on peut substituer $\varphi(T, K)$ par $\partial^2 C / \partial K^2(T, K)$. En remplaçant (9) dans (8), on obtient alors:

$$\partial_T C(T, K) = \frac{1}{2} K^2 A^2(T, K) \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(T, K) E[f(V_T)^2 | S_T = K]$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} A^2(T, K) E[f(V_T)^2 | S_T = K] &= \frac{\partial_T C(T, K)}{\frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(T, K)} \quad (10) \\ &= \sigma_{Loc}^2(T, K) \end{aligned}$$

Ce qui prouve la formule (7).

ii. Remarque 1

Observons que si $E[f(V_T)^2 | S_T = K] = 1$, on obtient

$$A^2(T, K) = \frac{\partial_T C(T, K)}{\frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(T, K)}$$

Ce qui n'est rien d'autre que la formule de Dupire. La preuve que nous venons de présenter est donc aussi une façon particulière de démontrer la formule de Dupire (3).

iii. Remarque 2

On voit ici qu'il est nécessaire d'estimer le terme $E[f(V_T)^2 | S_T=K]$ avant de calibrer le terme $A(t, S_t)$ à la volatilité implicite du marché. Mais le calcul de l'espérance conditionnelle $E[f(V_T)^2 | S_t=K]$ est difficile, car on ne connaît pas la loi jointe de V_t et S_t .

La calibration du modèle et l'estimation de ce terme seront l'objet de la Note Quant suivante. Nous y présentons trois méthodes de calibration. La méthode par EDP de Fokker-Planck, la méthode par projection markovienne et la méthode par particules.

5. CONCLUSION

Tout comme le modèle à volatilité locale de Dupire, le modèle à volatilité locale et stochastique peut être calibré afin de reproduire exactement les prix de marché des options vanilles. Cela se fait en introduisant une fonction correctrice de volatilité locale qui permet de modifier les lois marginales du sous-jacent.

La calibration de cette fonction n'est pas évidente car nécessite la connaissance de la loi jointe du sous-jacent et de la volatilité du modèle.

Les différentes méthodes de calibration du modèle à volatilité locale stochastique seront développées dans la prochaine Note Quant.

BIBLIOGRAPHIE

Dupire, B., 1993. Pricing and Hedging with Smiles. Paribas Capital Markets.

Dupire, B., 1994. Pricing with a Smile. Risk.

Guyon, J. & Henry-Labordère, P., 2013. Nonlinear Option Pricing. s.l.:CRC Press.

Gyöngy, I., 1986. Mimicking the One-Dimensional Marginal Distributions of Processes Having an Ito Differential. Probability Theory and Related Fields, pp. 501-516.

Jeanblanc, M., Yor, M. & Chesney, M., 2009. Mathematical Methods for Financial Markets. s.l.:Springer.

Labordère, P.-H., 2009. Calibration of Local Stochastic Volatility Models to Market Smiles: A Monte-Carlo Approach. Risk.

Labordère, P. H., 2012. Being particular about calibration. Risk, pp. 92-97.

Piterbarg, V., 2006. Markovian Projection Method for Volatility Calibration.

Willem van der Stoep, A., Grzelak, L. A. & Oosterlee, C. L., 2014. The Heston Stochastic-Local Volatility Model: Efficient Monte Carlo Simulation. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 17(7).



