AWALEE NOTES

La méthode de Monte Carlo Américain pour le pricing d'options et le calcul du risque de contrepartie

Etude réalisée par la practice Data Science

awalee

AOUT 2019

Sommaire

awalee notes

I. Introduction

Il existe plusieurs façons de valoriser les produits exotiques dits «path-dependent» ainsi que leur CVA[1], ces méthodes diffèrent selon des critères de simplicité et de rigueur. L'algorithme « American Monte Carlo » (méthode de Longstaff-Schwartz ici, cf. [2]) utilise la régression des moindres carrés et est relativement facile à comprendre et à implémenter.

Les produits de type Option Américaine sont en fait relativement difficiles à évaluer (ou «pricer») et à couvrir (calcul de sensibilités), en raison de l'incertitude intrinsèque associée à la règle d'exercice qui offre au titulaire le droit d'exercer l'option à tout moment avant la date d'expiration.

La méthode consiste à estimer les flux de trésorerie à un nœud donné et comparer le résultat actualisé à la valeur de l'exercice immédiat, avec l'hypothèse que l'on exerce l'option que si cette dernière est supérieure au flux actualisé. Ce processus est répété de manière rétrograde (« backward ») jusqu'à la date de pricing.

Un avantage remarquable de cette méthode (par rapport à d'autres méthodes Monte Carlo) est qu'elle ne requiert pas de limites minimale ou maximale sur les valeurs du strike. Cependant, un certain nombre de facteurs numériques peuvent influencer les résultats.

Cette note a pour but de présenter la méthode American Monte Carlo et de la mettre en pratique avec un exemple de convergence.

II. Simulation et Discrétisation de Processus Stochastiques

II.1. Application au Brownien Géométrique

En guise d'exemple, nous modélisons le prix d'un sous-jacent (S_t) par un processus log-normal entre t_i et t_{i+1}, avec pour rendement et volatilité annuels respectifs μ et σ.

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} \cdot e^{(\mu-\sigma^2/2)(t_{i+1}-t_i)+\sigma\sqrt{t_{i+1}-t_i}z_{i+1}}$$

Où les Z_i sont i.i.d. et suivent la loi $N(0,1)$.

II.2. Monte Carlo

Comme l'indique son nom, l'American Monte Carlo utilise le pricing par la simulation Monte Carlo.

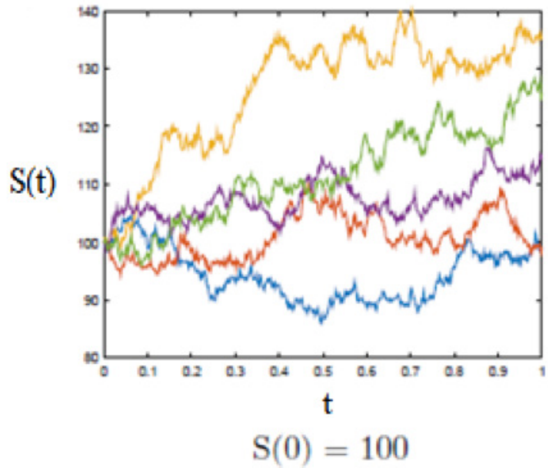
L'idée générale du pricing par Monte Carlo est d'approcher la valeur μ, c'est-à-dire l'espérance :

$$\mu = \mathbb{E}[h(X)] = \int h(x)p(x)\,dx$$

Où X est une variable aléatoire de densité p et h une fonction de payoff[2] d'un produit financier. L'espérance peut être estimée comme suit :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(x_i)$$

Où les x_i sont tirés indépendamment selon la loi de X.



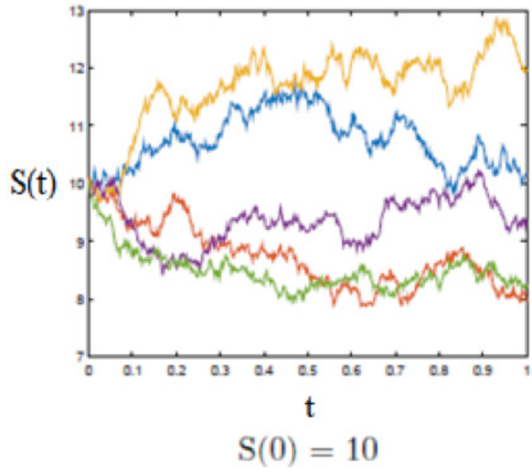


Figure 1 : Diffusion du Processus S_t

[1] ***L'ajustement de valeur de crédit** ou **CVA** (de l'anglais Credit Valuation Adjustment) est une méthode de valorisation des produits dérivés financiers pour tenir compte des événements de crédit, dont le défaut fait partie.*

[2] *Le «payoff» d'un produit financier est le paiement terminal auquel le contrat donne droit.*

Nous avons la convergence presque-sûre suivante : quand $n \to +\infty$, $\hat{\mu} \to \mu$

On connait la variance de X, elle peut également être approchée par Monte Carlo :

$$\sigma^2 = Var\left(h(X)\right) = \int \left(h(x) - \mu\right)^2 p(x)dx$$

Alors le théorème central limite permet ensuite de donner un intervalle de confiance avec la convergence en loi suivante quand $n \to +\infty$:

$$\frac{\sqrt{n}\left(\hat{\mu} - \mu\right)}{\sigma} \to \mathcal{N}\left(0, 1\right)$$

L'écart type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ diminue en $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

La méthode Monte Carlo a donc une vitesse de convergence de $\frac{1}{\sqrt{n}}$, ce qui constitue à la fois une force et une faiblesse.

En effet, cette vitesse de convergence est lente mais n'augmente pas avec la dimension (nombre de sous-jacents ou facteurs de risques) comme c'est le cas pour le pricing par EDP par exemple. Ce point la rend particulièrement adaptée au pricing de CVA sur produits complexes.

II.3. La Réduction de la Variance

Il convient maintenant d'optimiser le choix de X de façon à diminuer la variance de l'estimateur de Monte Carlo $\hat{\mu}$. En effet, il est possible de prendre n'importe quelle variable aléatoire Y telle que la fonction densité $f_{h(Y)}$ de h(Y) ne s'annule pas sur le support de $f_{h(X)}$ (la réunion des intervalles sur lesquels elle ne s'annule pas), on remarquera que :

$$\begin{aligned}
\left[\frac{f_{h(X)}(h(Y))}{f_{h(Y)}(h(Y))}h(Y)\right] &= \int \frac{f_{h(X)}(h(y))}{f_{h(y)}(h(y))}h(y)f_{h(Y)}\left(h(y)\right)dh(y) \\
&= \int h(y)f_{h(X)}\left(h(y)\right)dh(y) \\
&= \mathbb{E}\left[h(X)\right] = \mu
\end{aligned}$$

On passe de la première à la seconde expression par la définition de la densité, ensuite par simplification des deux facteurs dans l'intégrale on retrouve en dernier μ.

Et le nouvel estimateur de μ, qui a pour nouvelle expression démontrée ci-dessus $\mathbb{E}\left[\frac{f_{h(X)}h(Y)}{f_{h(Y)}h(Y)}h(Y)\right]$ serait donc :

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f_{h(X)}\left(h(y_i)\right)}{f_{h(Y)}\left(h(y_i)\right)}h\left(y_i\right)$$

Comme $\hat{\mu}_n$ est un estimateur de μ : $\hat{\mu}_n \to \mu$

Il reste donc à trouver la densité $f_{h(Y)}$ qui minimise la variance, soit :

$$Var\left[\frac{f_{h(X)}(Y)}{f_{h(Y)}(Y)}h(Y)\right]$$

En observant les deux équations suivantes :

$$\mathbb{E}\left[\frac{f_{h(X)}(Y)}{f_{h(Y)}(Y)}h(Y)\right] = \mathbb{E}\left[h(X)\right]$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{f_{h(X)}(Y)}{f_{h(Y)}(Y)}\left|h(Y)\right|\right] = \mathbb{E}\left[\left|h(X)\right|\right]$$

On voit que les termes de droite ne dépendent pas de $f_{h(Y)}$, on en déduire que l'on peut minimiser la variance sans tenir compte de son deuxième terme :

$$\mathbb{E}\left[\frac{f_{h(X)}(Y)}{f_{h(Y)}(Y)}h(Y)\right]^2$$

Le problème de minimisation est donc restreint à :

$$\min_{f_{h(Y)}}\mathbb{E}\left[\frac{f_{h(X)}(Y)^2}{f_{h(Y)}(Y)^2}h(Y)^2\right] - \mathbb{E}\left[\frac{f_{h(X)}(Y)}{f_{h(Y)}(Y)}h(Y)\right]^2$$

À la minimisation de :

$$\min_{f_{h(Y)}}\mathbb{E}\left[\frac{f_{h(X)}(Y)^2}{f_{h(Y)}(Y)^2}h(Y)^2\right]$$

Ou encore :

$$\min_{f_{h(Y)}} Var\left[\frac{f_{h(X)}(Y)}{f_{h(Y)}(Y)}\left|h(Y)\right|\right]$$

La solution à ce problème est donnée par :

$$f^*_{h(Y)}(y) = \frac{\left|h(y)\right| f_{h(X)}(y)}{\mathbb{E}\left[\left|h(X)\right|\right]}$$

Toutefois, cette distribution est inconnue puisque l'espérance au dénominateur est la valeur recherchée dès le départ. On peut contourner ce problème avec la méthodologie d'approximation expliquée ci-dessous.

Méthodologie d'utilisation

Afin d'implémenter cette technique, il convient de commencer par une première estimation avec le Monte Carlo «naïf»[3] , puis de déduire un estimateur $\hat{f}^*_{h(Y)}$ de la distribution optimale $f^*_{h(Y)}$. Il est nécessaire ensuite de simuler des copies indépendantes $(h(Y_i))_{(i \geq 1)}$ avec la densité $f^*_{h(Y)}$ et calculer un nouvel estimateur à partir de celui-ci.

[3]*Une méthode «naïve» de Monte Carlo consiste à recourir à un échantillonnage simple de manière uniforme sans méthode complémentaire de réduction de variance.*

II.4. L'Algorithme de Longstaff-Schwartz

Le but de la méthode de Longstaff-Schwartz consiste à estimer le temps d'arrêt optimal sur la base des variables aléatoires simulées. Dans le cas du pricing d'une option américaine, le but est bien entendu d'estimer le temps d'arrêt optimal de l'option c'est-à-dire le temps d'exercice de l'option permettant un payoff maximal. On part du principe Monte Carlo déjà discuté pour pricer un produit à type d'exercice américain, de fonction de payoff $h(S_t)$. On calcule $C\left(S\left(t_i\right)\right)=\mathbb{E}\left[e^{-r\Delta t}P|S\left(t_i\right)\right]$ par récurrence descendante en partant de l'instant final où la valeur de l'option est égale au Payoff :

Pour $t = t_N$, $P = h(S(t_N))$
Pour $t = t_{N-1}$ jusqu'à $t = t_1$

- Si $C(S(t)) < h(S(t))$, alors $P = h(S(t))$
- Sinon $P = e^{-r\Delta t} P$

Où l'on a posé $\Delta t = t_{i+1} - t_i$.

Dans leur étude, Longstaff & Schwartz proposent d'approcher l'espérance conditionnelle (ou la fonction C) par une régression linéaire. Cette méthode appelée American Monte Carlo utilise la régression par la méthode des moindres carrés. Pour cela, il convient de recourir à une famille de fonctions orthogonales $(\Phi_k)_k$ et ensuite de projeter l'espérance conditionnelle sur l'espace linéaire engendré.

S'il y a exercice de l'option, on pose la formule suivante pour la j-ème trajectoire de simulation :

$$P^j\left(t_{i-1}\right)=h\left(S^j\left(t_{i-1}\right)\right)$$

Dans le cas contraire, la formule sera alors comme suit :

$$P^j\left(t_{i-1}\right)=\sum_k \alpha_k \phi_k\left(S^j\left(t_{i-1}\right)\right)$$

Avec les α_k des réels qui représentent les coordonnées de la projection orthogonale sur l'espace des fonctions.

La Figure 2 résume les étapes relatives à l'implémentation de l'algorithme de Longstaff & Schwartz.

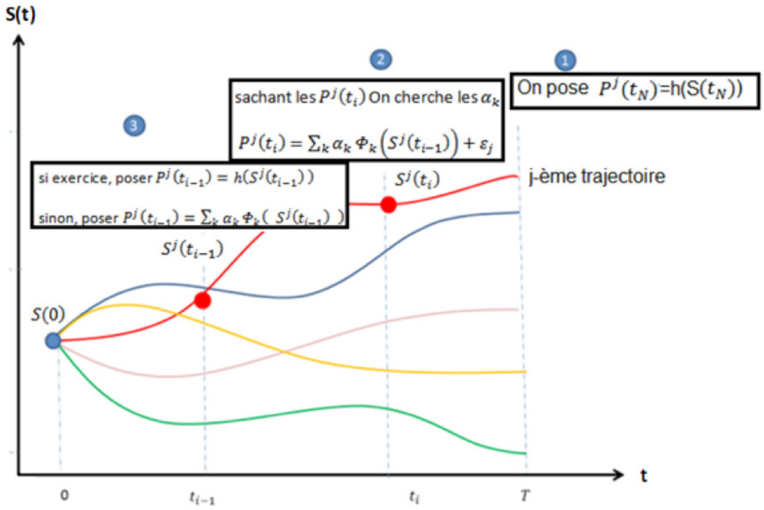


Figure 2 : Schéma Explicatif du Processus de Pricing AMC

III. Amélioration et Simplification

III.1. Regroupement par Paquets (Bundling)

Le temps de calcul est souvent le problème majeur du pricing de la CVA sur options exotiques. Nous représentons ici une méthode d'optimisation.

On regroupe à l'étape t_i les $S(t_i)$ en les classant dans un nombre de groupes dont les bornes sont fixées à chaque fois en fonction de la distribution de ces variables. On se contentera d'algorithmes de classification simple, toujours dans l'objectif de réduire le temps de calcul.

Remarque : $S(t_i)$ peut avoir une dimension supérieure à 1 (plusieurs facteurs de risque). L'idée est de faire à chaque étape t_i non pas une seule régression sur tous les $S(t_i)$ mais une régression dans chaque «paquet».

Cela revient à des régressions linéaires simples dans chaque paquet. La fonction de régression totale sera donc linéaire par morceaux.

La figure suivante représente la section de profil à un instant t_i du schéma précédent (avec 2 facteurs de risque), un algorithme de «bundling» peut donner par exemple les trois zones colorées auxquelles on appliquera à chacune une régression.

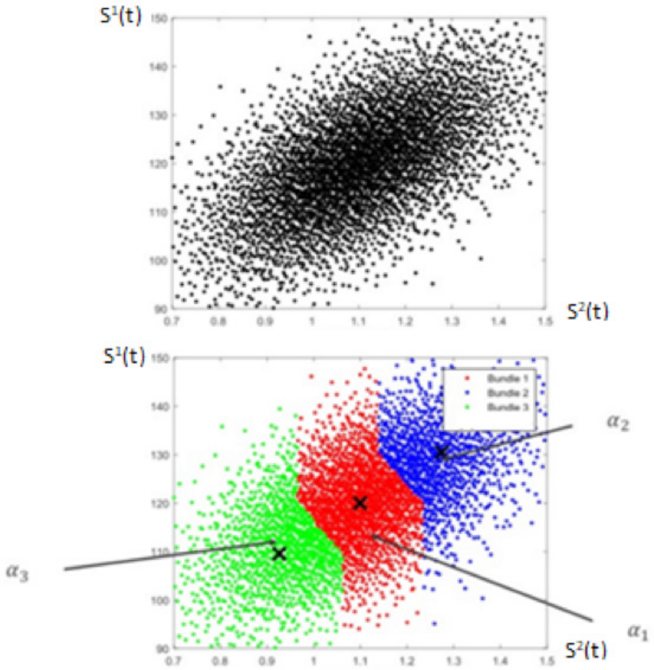


Figure 3 : Exemple de Bundling avec Algorithme de Classification (2 Sous-Jacents)

III.2. Application et Résultats en 2 Dimensions

Dans la suite on fixe le nombre de fonctions de test à 3 pour donner un ordre de grandeur de la performance de l'AMC avec bundling. La convergence est testée ici pour un put américain. Pour des questions de mémoire, nous optons pour le bundling le plus simple, à savoir diviser le domaine en un nombre de rectangles R égal à 10.

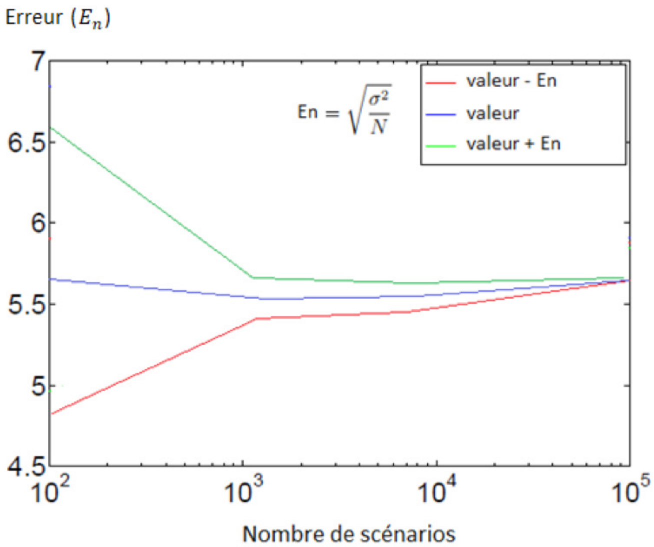


Figure 4 : Convergence de l'Intervalle de Confiance AMC en 2 Dimensions

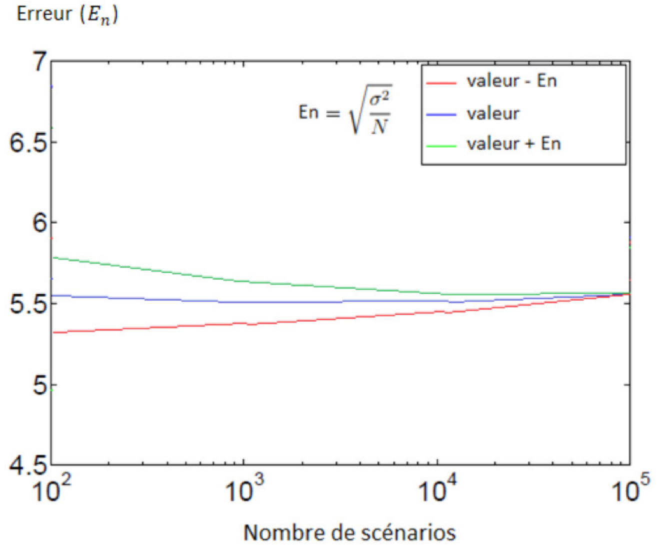


Figure 5 : Convergence de l'Intervalle de Confiance AMC Amélioré en 2 Dimensions

III.3. Résultats et Comparaison

Nous remarquons que la méthode AMC, améliorée par le bundling, la réduction de variance et la régression locale, approche l'estimation voulue avec beaucoup plus de précision. Toutefois, cela représente un léger coût supplémentaire en termes de calcul.

La régression sur des domaines plus restreints donne notamment la possibilité de réduire la complexité des fonctions (Φ_k) que nous avons prises ici linéaires d'ordre 1. La restriction des domaines dépend de l'algorithme de classification choisi.

Monte Carlo reste incontournable pour le pricing en multidimensionnel avec comme point fort sa précision. L'inconvénient majeur de cette méthode est sa lenteur cependant il existe d'autres alternatives (cf. [1] où d'autres propositions d'améliorations sont décrites par l'auteur).

IV. Conclusion

Cette étude a permis de présenter la problématique de pricing des options américaines par la méthode de Monte Carlo et plus précisément la méthode de Longstaff-Schwartz qui repose une méthode de régression linéaire (MCO) afin d'évaluer l'espérance conditionnelle des payoffs actualisés.

La méthode Monte Carlo s'avère particulièrement pratique dans l'évaluation de produits dérivés plus complexes et le calcul de la CVA sur ces produits toutefois elle présente certains inconvénients notamment en termes de temps de calcul. Afin d'améliorer cette technique, l'étude propose de regrouper par paquets ("bundling") les valeurs obtenues par les différentes trajectoires simulées.

Ainsi, pour chaque temps t, les actifs ayant des prix similaires peuvent ainsi être regroupés au sein d'un même paquet. Ces paquets permettent ensuite d'estimer plus facilement la valeur de l'option pour la période suivante.

Cette étude a également permis de montrer la pertinence d'une telle technique avec un exemple numérique.

Bibliographie

[1] **Valuing American Derivatives by Least Squares Methods** M. Cerrato, September 8, 2009

[2] **Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach**, The Review of Financial Studies, Vol. 14, No. 1. F. A. Longstaff and E. S. Schwartz, 2001

[3] **Simulation for American Options: Regression Now or Regression Later?** P. Glasserman and B. Yu, 2004b

[4] **Option Pricing: A Simplified Approach**, J. C. Cox, S. A. Ross and M. Rubinstein, 1979

A PROPOS DE NOUS

Awalee est un cabinet de conseil indépendant spécialiste du secteur de la Finance, créé en 2009 et qui compte plus de 80 collaborateurs.

Nous sommes en mesure à la fois d'adresser des sujets relatifs à l'expertise des métiers de la Finance (Consulting) et de conduire des projets d'organisation et de transformation (Advisory). Et nous le faisons grâce à la synergie agile de ces deux savoir-faire.

Nos expertises s'exercent dans la conformité réglementaire, la finance quantitative, la fonction finance, la gouvernance des outils & systèmes, le management des risques et les marchés financiers. Au-delà de ce que nous faisons, il y a comment nous le faisons : viser l'excellence et repousser nos limites tout en cultivant la convivialité et en favorisant l'esprit d'équipe.

Nous sommes Awalee : nous sommes AWARE & AWESOME.

Awalee consulting
77 Boulevard Berthier
75017 Paris

www.awaleeconsulting.com

linkedin.com/awaleeconsulting